

## Mallas isostáticas bidimensionales en elementos finitos

Rubén Martínez Marín  
Profesor Titular ETSICCP. Madrid  
Avelino Samartín Quiroga  
Catedrático ETSICCP. Madrid

### INTRODUCCION

En la actualidad, existen malladores automáticos asociados a los programas de Elementos Finitos (2), (3) que permiten obtener la malla con una cierta comodidad pero que no garantizan la bondad de la misma y, mucho menos, que dicha malla esté próxima a la óptima.

Sería conveniente encontrar un método que sea capaz de generar una malla óptima, de acuerdo con un cierto funcional (E.P.T., E.C.M., etc.), para un número determinado de nudos y con unas condiciones de sollicitación y contorno dadas (número fijo de grados de libertad), sin un gran esfuerzo de computación.

El problema planteado se puede dividir en dos fases; en la primera fase, se trata de obtener la malla óptima utilizando los recursos de computador que sean necesarios, y en la segunda fase, se tratará de encontrar el camino que permita llegar a la malla óptima o, como mínimo, a una malla mejorada, de una forma directa y con un mínimo esfuerzo de computación.

La primera fase se desarrolló utilizando la técnica del gradiente descendente, aplicada a la Energía Potencial Total y al funcional Error Cuadrático Medio (1), comprobándose que la solución es prácticamente independiente del funcional elegido.

En la segunda fase, se observó que la malla isostática, obtenida al ajustar la posi-

ción de los nudos a las isostáticas correspondientes a un análisis previo de la malla inicial, conduce a unos resultados que mejoran sensiblemente los obtenidos con dicha malla inicial.

### MALLA OPTIMA. GRADIENTE DESCENDENTE

La malla para la cual se obtenga la mínima energía potencial, corresponderá a la malla óptima (4). Matemáticamente, el problema de encontrar la energía potencial total, mínima, se plantea de la siguiente forma (5):

La energía potencial total, viene dada por la expresión:

$$V = U - W = U + U_e$$

donde:

$$U = \text{energía de deformación} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

$$U_e = \text{energía potencial} = \int_V f_i u_i dV + \int_A p_i u_i dA$$

$\sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ , son las componentes de las tensiones y deformaciones lineales.

$f_i$ ,  $p_i$ , son las fuerzas másicas y fuerzas externas.

$u_i$ , son las componentes de los desplazamientos.

La discretización en Elementos Finitos de la expresión anterior es:

$$V = \frac{1}{2} d^T K d - d^T p \quad [1]$$

donde  $K$  es la matriz de rigidez de la estructura,  $d$  el vector desplazamiento y  $p$  el vector de fuerzas aplicadas en los nudos.

El mínimo de [1] viene dado por las ecuaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial d} = 0, \text{ es decir, } K d = p \quad [2]$$

siendo el valor:

$$V_{\min} = -\frac{1}{2} d^T p \quad [3]$$

Cuando la posición de los nudos no viene dada de antemano, tanto la matriz de rigidez de la estructura como el vector de cargas, dependen de dichas coordenadas, pudiéndose obtener el mínimo de  $V$  mediante el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial d} = 0; \text{ es decir: } K d = p \quad [4]$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0; \text{ es decir: } d^T \frac{\partial K}{\partial r} d - d^T \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad [5]$$

donde  $r$  es el vector de coordenadas.

Para resolver, de una forma adecuada, el conjunto de ecuaciones no lineales [5], se

ha utilizado un método numérico paso a paso.

En el paso  $i$ , la posición actual de los nudos se supone conocida, y la solución elástica  $d_i$  se obtiene del conjunto de ecuaciones

$$K_i d_i = p \quad [6]$$

es decir:

$$d_i = K_i^{-1} p \quad [6]$$

donde:

$$K_i = K(r_i)$$

La energía potencial total,  $V_i$ , se calcula mediante la expresión:

$$V_i = -\frac{1}{2} d_i^T p = V(r_i) \quad [7]$$

y la nueva posición de los nudos  $r_{i+1}$ , se deduce a partir de:

$$r_{i+1} = r_i + \lambda \left( \frac{\Delta V}{\Delta r} \right) \quad [8]$$

donde  $\Delta V/\Delta r$  es una aproximación a la pri-

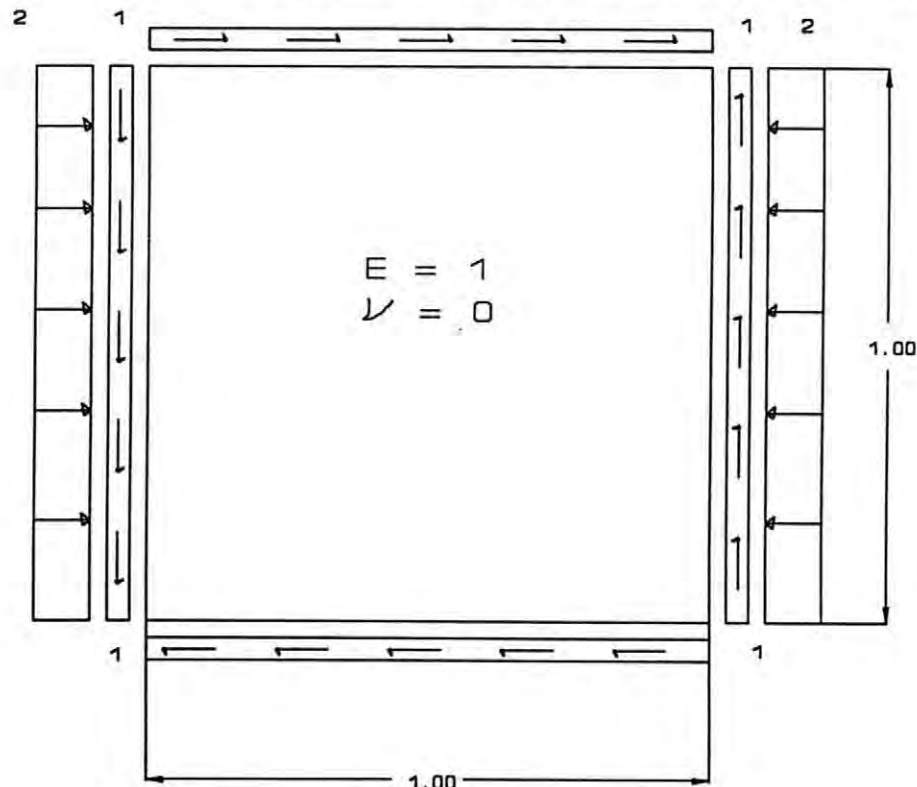


Fig. 1. Laja. Geometría y cargas.

mera derivada parcial de la energía potencial total en la configuración  $r_i$ , con respecto a las diferentes coordenadas de los nudos.

Los valores de  $(\Delta V/\Delta r)_i$ , en la configuración  $r_i$  se determinan numéricamente, para cada componente  $j$  de  $r_{ij}$ , del vector  $r_i$ , mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \text{Componente } j \text{ de } \left( \frac{\Delta V}{\Delta r} \right)_i &= \\ &= \frac{V(r_i + \Delta r_{ij}) - V(r_i)}{\Delta r_{ij}} \end{aligned}$$

donde  $\Delta r_{ij}$  es el incremento de la componente  $j$ , del vector  $r_i$ .

El valor del parámetro  $\lambda$  positivo, se consigue mediante consideraciones sobre el nivel de precisión requerido en el análisis. Este método de optimización no lineal es el bien conocido método del gradiente descendente.

En las figuras 1, 2 y 3 se puede observar un ejemplo en el que se parte de una malla inicial, con una característica de regularidad, al que se le aplica la técnica del gradiente descendente para obtener la energía potencial total mínima. En este ejemplo se conoce la solución exacta del problema, mediante la aplicación de la función de Airy. En la Tabla 1 se resumen los valores correspondientes a la energía potencial total, que muestran el grado de exactitud conseguido mediante el proceso de optimización.

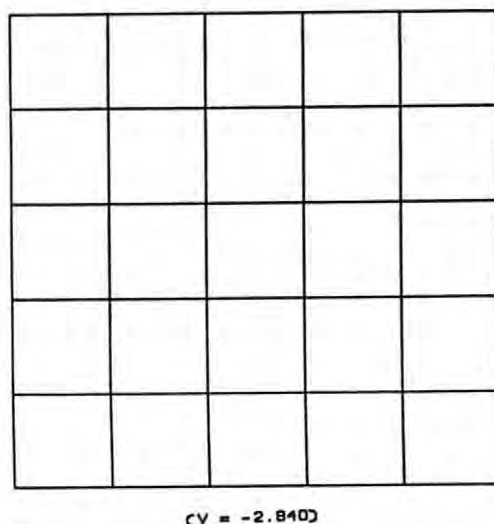


Fig. 2. Malla inicial.

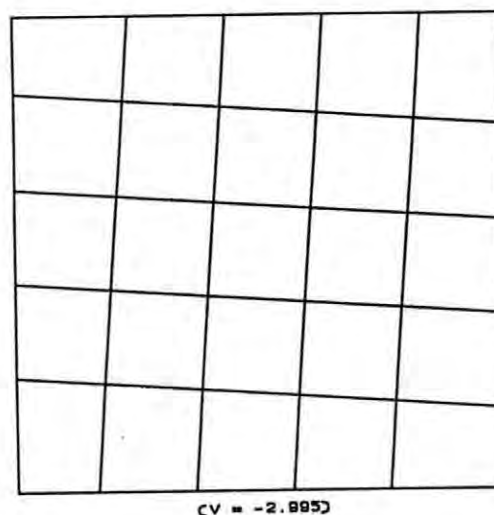


Fig. 3. Malla optimizada.

**TABLA 1**  
**Energía potencial total**

Tipo de malla	Energía potencial total
Malla inicial (paso constante)	-2.840
Malla óptima	-3.000
Malla optimizada (método gradiente descendente)	-2.995

## MALLA ISOSTATICA

Del análisis de numerosos casos estudiados entre los que se encuentra el expuesto anteriormente, se observa que la malla optimizada por el método del gradiente descendente aplicado a la energía potencial total, tiende a situar los nudos a lo largo de las líneas isostáticas correspondientes a la solución de la malla inicial.

Se procedió a un estudio sistemático de diversos casos, de los cuales se conocía la forma de las isostáticas mediante fotoelasticidad (6), y se analizaron los resultados obtenidos al diseñar una malla isostática, es decir, con los nudos situados sobre las isostáticas y los correspondientes a una malla inicial suficientemente regular (7). Estos resultados se completaron con un análisis del modelo, mediante una malla de un elevado número de nudos, para el que se supuso que produciría una solución suficientemente cercana a la solución exacta al problema (Figuras 4 a 15).

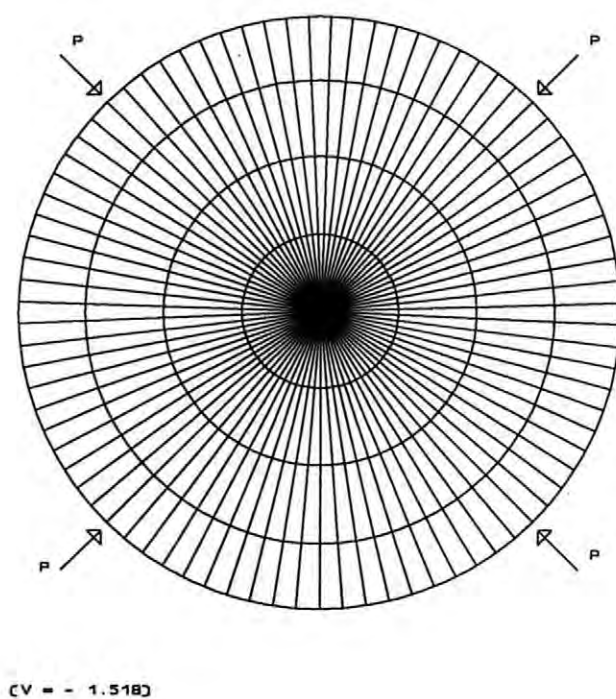


Fig. 4. Caso 1. Malla inicial.

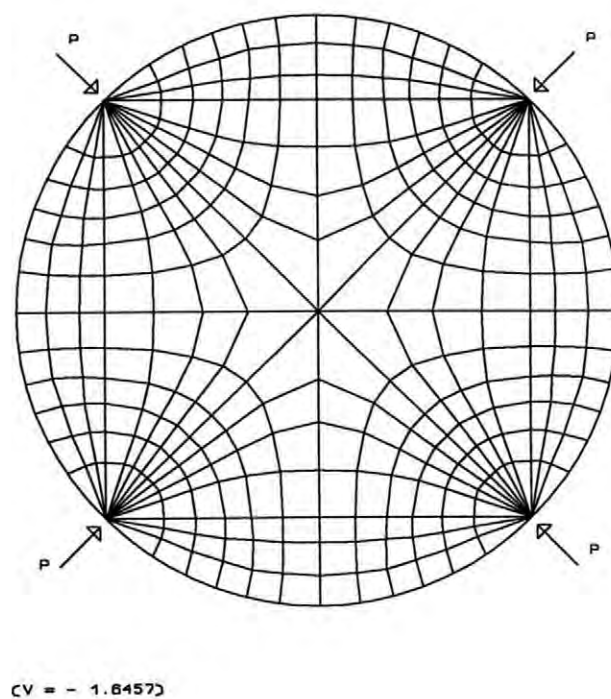


Fig. 5. Caso 1. Malla isostática.

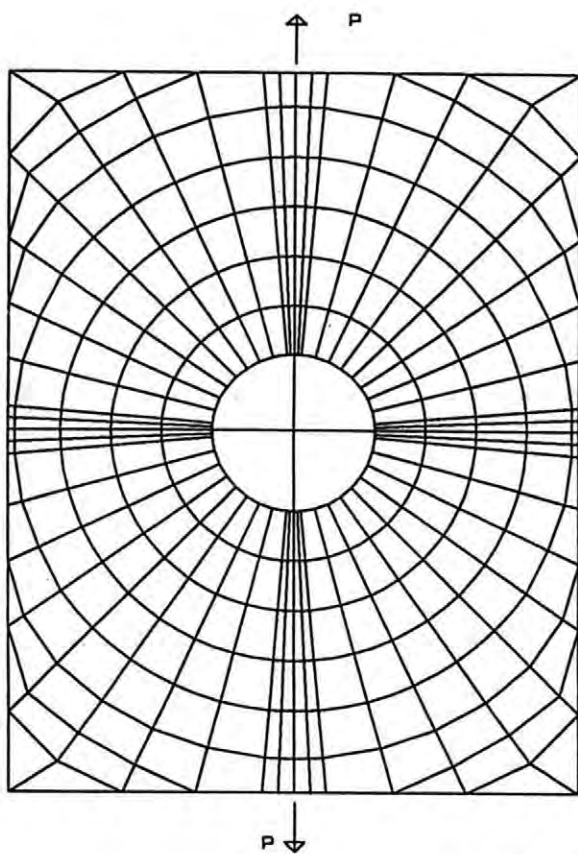


Fig. 6. Caso 2. Malla inicial.

$(V = -48.83)$

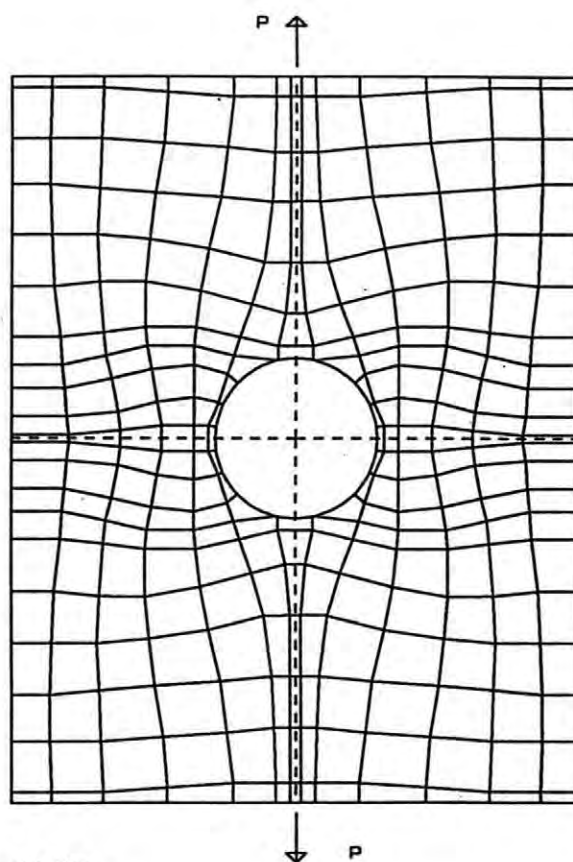


Fig. 7. Caso 2. Malla isostática.

$(V = -54.35)$

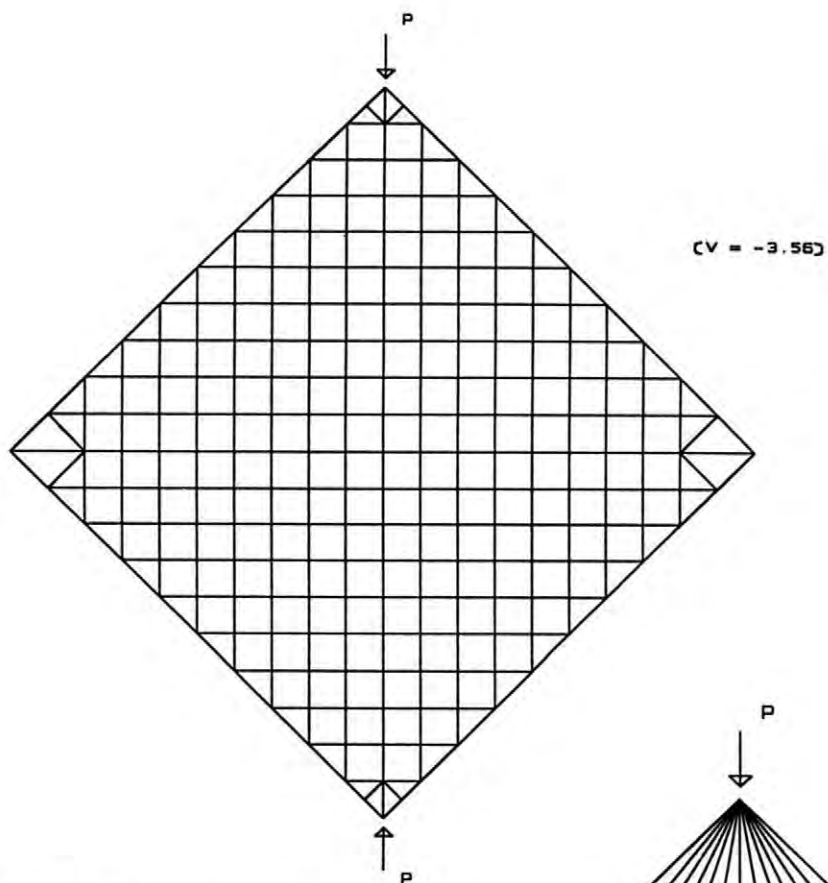


Fig. 8. Caso 3. Malla inicial.

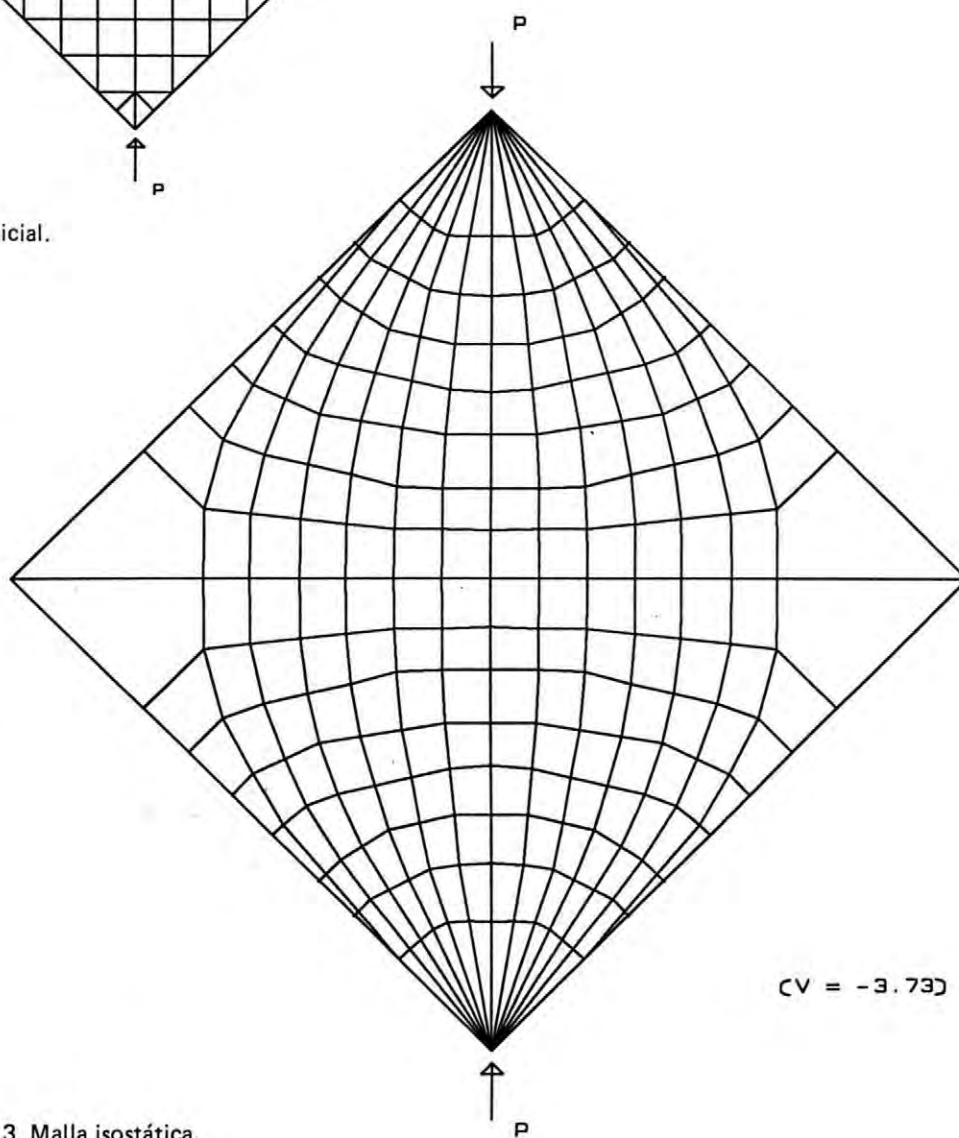
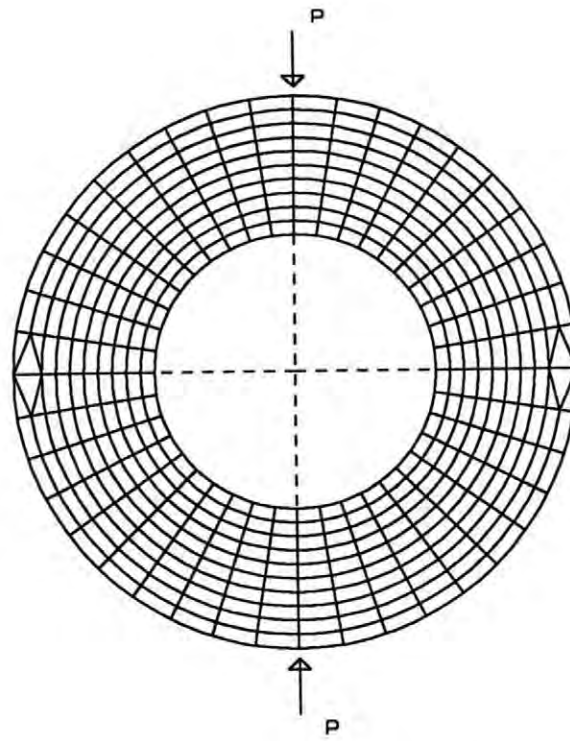


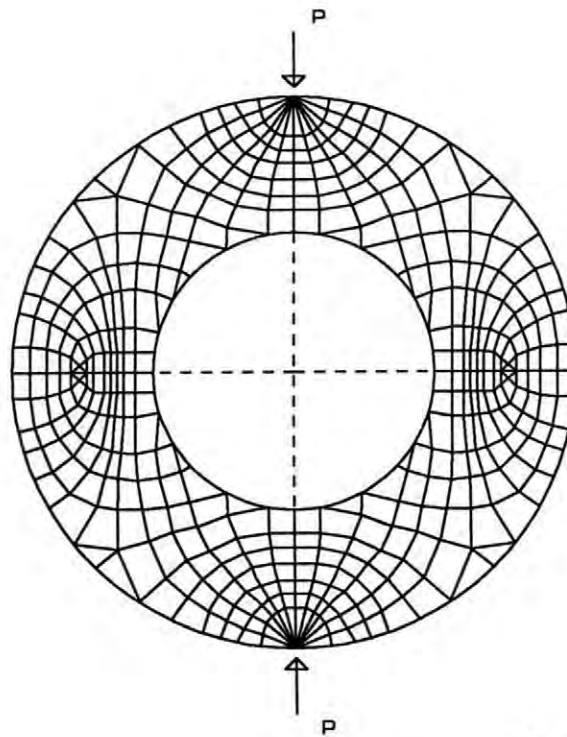
Fig. 9. Caso 3. Malla isostática.





$$[V = -12.057]$$

Fig. 10. Caso 4. Malla inicial.



$$[V = -12.36]$$

Fig. 11. Caso 4. Malla isostática.

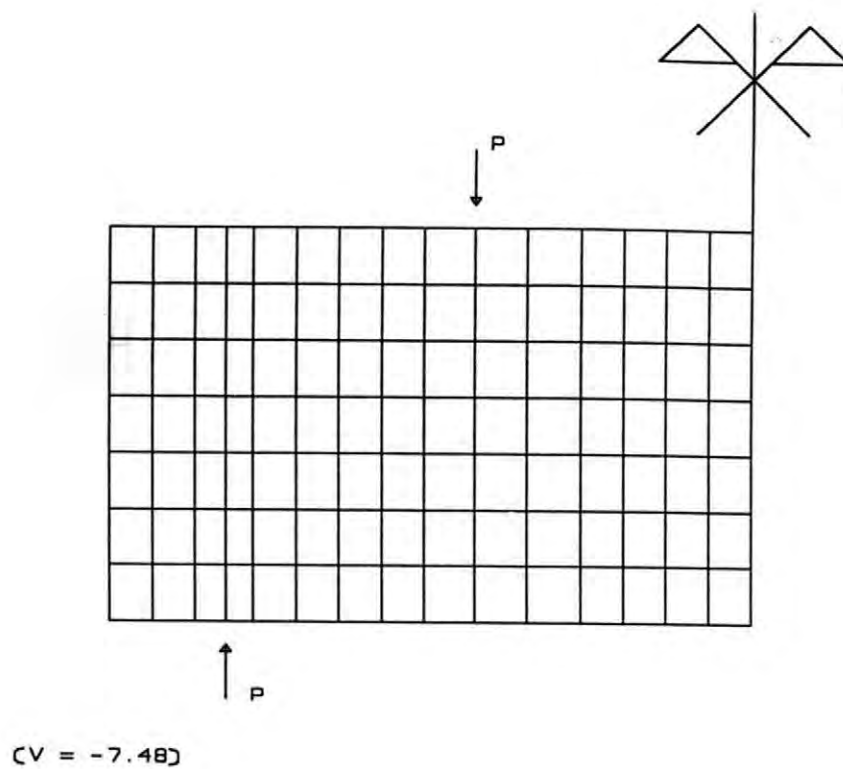


Fig. 12. Caso 5. Malla inicial.

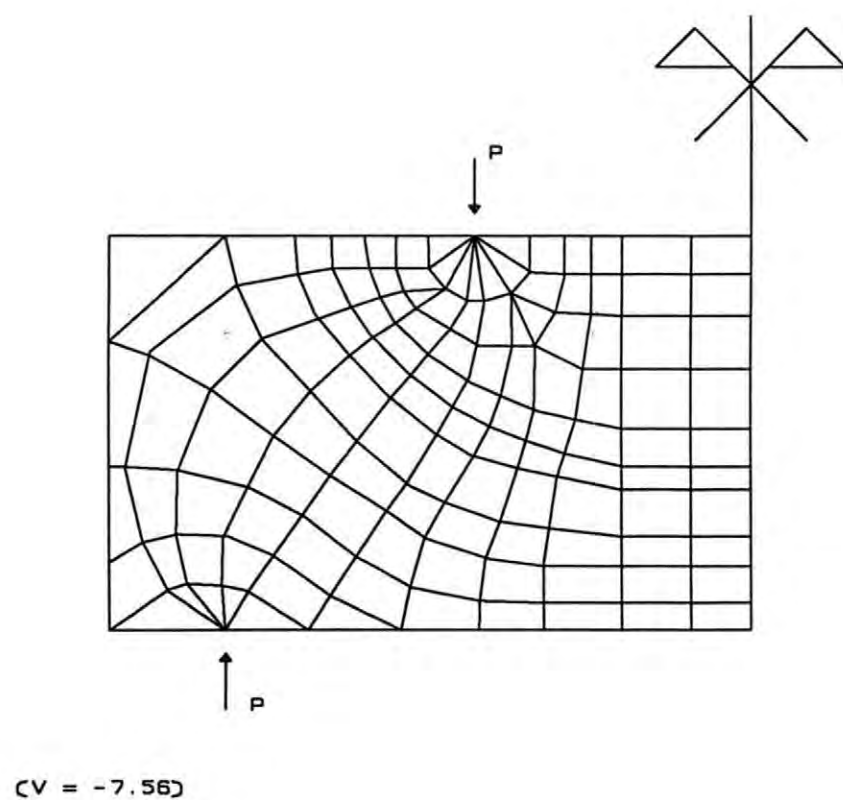
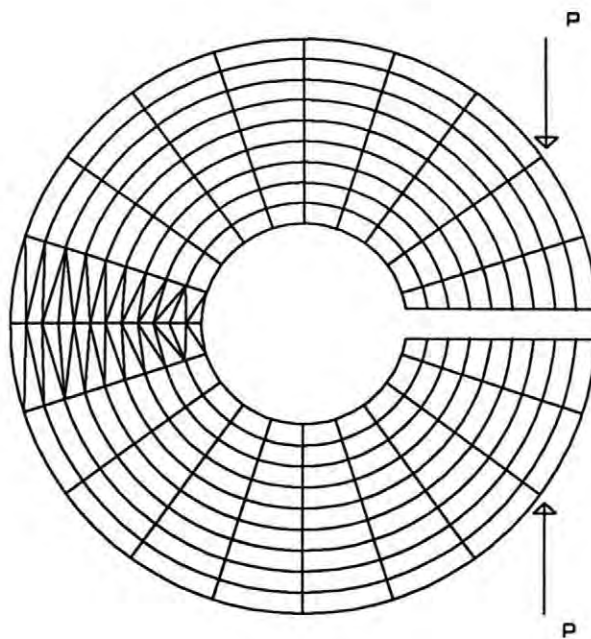


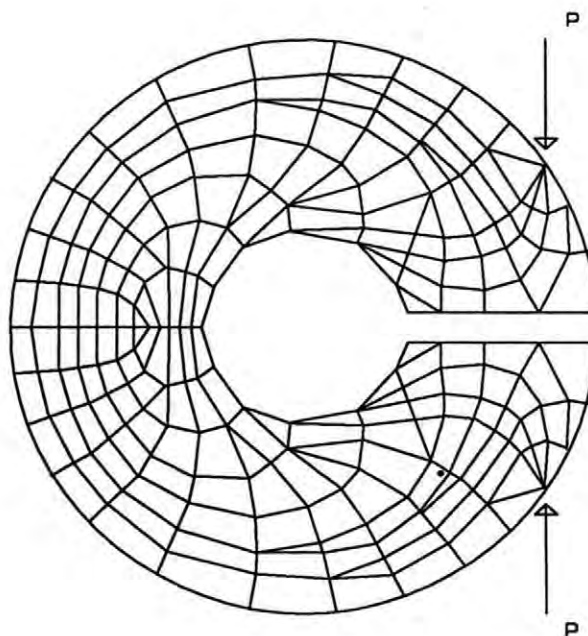
Fig. 13. Caso 5. Malla isostática.





$$CV = -6.338$$

Fig. 14. Caso 6. Malla inicial.



$$CV = -6.37$$

Fig. 15. Caso 6. Malla isostática.

**TABLA 2**  
**Variación de la Energía Potencial Total en los diferentes modelos**

Caso	E.P.T. in.	E.P.T. IS.	E.P.T. E.	$\frac{(IS. - in.)}{in.}$	$\frac{(E. - IS.)}{E}$
1	- 1.518	- 1.645	- 1.712	8,4%	3,9%
2	-48.830	-54.350	-63.410	11,3%	14,3%
3	- 3.560	- 3.730	- 3.980	4,8%	6,3%
4	-12.057	-12.360	-13.780	2,5%	10,3%
5	- 7.480	- 7.560	- 8.570	1,0%	11,8%
6	- 6.338	- 6.370	- 7.450	0,5%	14,5%

En la Tabla 2, se exponen los resultados correspondientes a las figuras anteriores.

El significado de cada columna es:

- E.P.T. in. = Energía Potencial Total de la malla inicial.
- E.P.T.IS. = Energía Potencial Total de la malla isostática.
- E.P.T.E. = Energía Potencial Total de la solución exacta.
- (IS.-in.)/in. = Porcentaje de variación de la isostática respecto de la inicial.
- (E.-IS.)/E. = Porcentaje de variación de la exacta respecto de la isostática.

### ERROR CUADRATICO MEDIO

Para comprobar la bondad de los resultados expuestos anteriormente, se introdujo un nuevo funcional, denominado Error Cuadrático Medio, y se aplicó la técnica del gradiente descendente a este funcional (8). Para la definición del nuevo funcional se realizan las siguientes consideraciones:

Se supone que N elementos confluyen en un nudo j y se obtiene una única tensión para este nudo, mediante la expresión:

$$\sigma_j^m = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{ij}^m}{N} \quad [9]$$

Para cada nudo j que pertenece al elemento i, se puede deducir el error cuadrático medio de la tensión, aplicando la expresión:

$$E_j = \sqrt{\frac{\sum (\sigma_j^m - \sigma_{ij}^m)^2}{N}} \quad [10]$$

La expresión [10] representa el error cuadrático medio de una componente cualquiera de la tensión, en cada nudo de un determinado elemento. En cada nudo de la malla se obtienen tres escalares  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_{xy}$ , correspondientes a las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Si se suman los tres escalares, el indicador será global y único, pudiéndose analizar los resultados totales y parciales (9). Por tanto, la expresión del indicador global único es:

$$E = \sum_{i=1}^N (E_x^i + E_y^i + E_{xy}^i) \quad [11]$$

donde N es el número de nudos de la malla y E el indicador propuesto (suma de los errores cuadráticos medios de las tensiones).

En la Tabla 3, se representan los valores del error cuadrático medio, obtenidos en los mismos casos planteados anteriormente.

**TABLA 3**  
**Variación del Error Cuadrático Medio en los diferentes modelos**

Caso	E.C.M.in.	E.C.M.IS.	$\frac{(in.-IS.)}{in.}$
1	120,12	77,23	35,70%
2	96,55	74,23	23,11%
3	113,55	68,99	39,24%
4	121,45	66,78	45,01%
5	101,01	75,45	25,30%
6	88,45	42,23	52,25%

### CONCLUSIONES

Se pueden establecer las siguientes conclusiones:

—La aplicación de la metodología basada en la optimización de la malla, en un número importante de casos, ha mostrado que se pueden alcanzar, para un mismo número de nudos, mejoras de hasta un treinta y cinco por ciento, de acuerdo con cualquiera de las dos medidas citadas anteriormente, es decir, la correspondiente a la Energía Potencial Total y la del Error Cuadrático Medio, utilizando como mallas iniciales disposiciones lógicas en la práctica, como son las mallas uniformes.

—Se ha observado también que, en problemas para los que se conoce la solución exacta, con un número relativamente reducido de nudos, se pueden alcanzar valores muy próximos a la Energía Potencial Total exacta.

—No obstante, la técnica de optimización no lineal requiere un tiempo de computador excesivo, no así de esfuerzo humano. Ello hace aconsejable la utilización de esta técnica, solamente a casos complejos, para los que no exista experiencia anterior, o bien, cuando se desee desarrollar una normativa acerca del diseño más adecuado de mallas, en elementos finitos.

—Las mallas óptimas obtenidas al aplicar cualquiera de las dos medidas antes citadas, presentan diferencias poco significativas. Este hecho, observado en todos los casos estudiados, parece indicar que la bondad de los resultados es independiente de la medida que se utilice.

—De los resultados obtenidos en numerosos casos analizados, se ha comprobado que los nudos de la malla óptima se situaban a lo largo de las líneas isostáticas, es decir, de las envolventes de las direcciones de las tensiones principales. Como es conocido, estas líneas isostáticas constituyen dos conjuntos de familias de curvas, ortogonales entre sí, y los nudos se sitúan de forma que sus distancias, medidas según ambas direcciones, sean iguales en cada nudo. La malla, con la posición de los nudos así obtenidos, se denomina malla isostática isométrica.

—En todos los casos analizados, los resultados obtenidos con mallas isostáticas isométricas han sido mejores que los producidos por las mallas inicialmente propuestas. Esta conclusión es válida para

cualquiera de las dos medidas del error, consideradas.

—La conclusión anterior permite, al menos teóricamente, diseñar la malla óptima para una estructura y carga determinada. Se comprende que esta malla óptima depende, no sólo de la geometría de la estructura sino también de las cargas, condiciones de contorno, homogeneidad del material, etc., ya que las líneas isostáticas son resultado de todos estos factores.

Una extensión interesante de los resultados obtenidos corresponde al caso de varias hipótesis de carga. La malla óptima que habrá que considerar estará situada entre las mallas deducidas para cada caso de carga. Una posibilidad interesante sería utilizar un funcional que englobase los funcionales de cada caso de carga.

## REFERENCIAS

(1) R. Martínez Marín y A. Samartín Quiroga. "Two-dimensional mesh optimization in the Finite Element Method". *Computers & Structures*. Vol. 40, 1169-1175 (1991).

(2) Soo-Won Chae y Klaus-Jürgen Bathe. "On automatic mesh construction and mesh refinement in Finite Element analysis". *Computers & Structures*. Vol. 32, 911-936 (1989).

(3) J.F. Thompson. "Numerical Grid Generation". North-Holland (1982).

(4) K. Washizu. "Variational Methods in Elasticity and Plasticity". Pergamon Press. Oxford (1968).

(5) B.M. McNeice y P.V. Marcal. "Optimization of Finite Element Grids based on maximum potential energy". Technical Report # 7. Brown University. Providence (1971).

(6) Max Mark Frocht. "Photoelasticity". Vol. I. John Wiley & Sons, Inc. NY. USA (1941).

(7) B.M. Irons y A. Razzaque. "Experience with the patch test". *Mathematical Foundations of the Finite Element Method*. 557-87 (1972).

(8) M.C. Imgrund - Swanson Analysis

Systems, Inc. "Some experiences with two Error Estimators within a Commercial Finite Element Code" (1991).

(9) M. Ainsworth, J.Z. Zhu, A.W. Craig y O.C. Zienkiewicz. "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-posteriori error estimator in the Finite Element Method". *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 28, 2161-2174 (1989).

## RESUMEN

Se plantea el problema de conseguir un método que, partiendo de una malla inicial en elementos finitos, genere una malla próxima a la óptima, conservando el mismo número de grados de libertad y, por consiguiente, sin penalizar los tiempos de análisis por ordenador. La bondad de una malla se mide por un funcional determinado (Energía Potencial Total, Error Cuadrático Medio, etc.).

La Técnica del gradiente descendente, aplicada al funcional Energía Potencial Total (1) permite, a partir de una inicial dada, obtener una malla mejorada. No obstante, este método requiere un esfuerzo de computación muy grande.

Como consecuencia de la aplicación del método del gradiente descendente a numerosos casos, se ha observado que la geometría que adopta la malla mejorada, se aproxima a la de una malla tal que sus nudos se sitúan sobre las líneas isostáticas (envolventes de las tensiones principales) y generan elementos regulares (de lados iguales) o cuasirregulares.

La conclusión más importante es, precisamente, que a partir de una malla inicial, razonablemente regular, se puede realizar un único análisis y definir las isostáticas correspondientes a este modelo. Ajustando una malla, con el mismo número de nudos

que la inicial, a las líneas isostáticas con nudos situados de forma regular, se obtiene otra que está próxima a la óptima. A la malla así obtenida, se le denomina isostática isométrica.

Esta conclusión se ha comprobado que es válida para los diferentes funcionales que se utilizan para evaluar la bondad de la malla, en elementos finitos.

## SUMMARY

Current research is engaged in finding automatic techniques to improve, in some sense, an already existing mesh by adding new degrees of freedom (new nodes or increasing the order of the polynomial in some elements). The objective of this study is to find a technique to obtain a good mesh, near the optimum, starting with an initial mesh and keeping the total number of degrees of freedom.

The method known as steepest gradient method applied to the functional Total Potential Energy (1) allow us to obtain a new mesh better than the initial, but this technique is strongly time consuming.

From a large number of analysed cases, it was observed the geometry of the optimum mesh has the node position along the isostatic lines building regular elements.

The main conclusion is from an initial mesh it is posible to analyze the problem and to obtain the isostatic lines, with this result the nodes can be regularly placed along the isostatic lines and a new analysis using the so constructed mesh produces improved results. The mesh obtained in this way is called **isometric isostatic mesh**.

In order to check the goodness of the results, it was defined a new functional called **Averaged Quadratic Error**.